PART4 内積の性質

要点① 内積の性質

ベクトルの内積について，次の性質が成り立つ。

内積の性質 I

1 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2 $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$　　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

3 $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$　　ただし，k は実数

（**2**の証明）

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$ とすると

$$\vec{b}+\vec{c}=(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$$

よって　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)$

$$=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2$$

$$=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

同様に　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

1，**3** も同様にして証明できる。

3 が成り立つことにより，$k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ を単に $k\vec{a}\cdot\vec{b}$ と書く。

また，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}$ について，$\vec{a}$ と $\vec{a}$ のなす角は　　であることにより

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^\circ=|\vec{a}||\vec{a}|\times 1=|\vec{a}|^2$$

これは，$\vec{a}=\vec{0}$ のときも成り立つ。よって，次の性質が成り立つ。

内積の性質 II

4 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$　　**5** $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

例　$2\vec{a}\cdot(3\vec{a}-4\vec{b})=$　　$-$　　$=6$　　$-8\vec{a}\cdot\vec{b}$

[MEMO]

4 (1) 次の等式が成り立つことを証明せよ。

(i) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$

(ii) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(iii) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2) $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ のとき，$|\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

Point Pickup

内積の性質と演算

1 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2 $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$　　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

3 $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$　　ただし k は実数

4 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$　　**5** $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

これらの性質を用いて，内積の演算を，文字式の積と似た方式で行うことができる。

ベクトルの大きさと内積

$s\vec{a}+t\vec{b}$ (s，t は実数)の形で表されたベクトルの大きさ $|s\vec{a}+t\vec{b}|$ について

$$|s\vec{a}+t\vec{b}|^2=(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})$$

のように，2 乗すると「内積」として演算を行うことができる。

第 3 講　PART4 確認問題

1　$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{c}+2\vec{d})$

$=\vec{a}\cdot(\boxed{ア}\vec{c}+\boxed{イ}\vec{d})+2\vec{b}\cdot(\boxed{ウ}\vec{c}+\boxed{エ}\vec{d})$

$=\boxed{オ}\vec{a}\cdot\vec{c}+\boxed{カ}\vec{a}\cdot\vec{d}+\boxed{キ}\vec{b}\cdot\vec{c}+\boxed{ク}\vec{b}\cdot\vec{d}$

2　$(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})$

$=3\vec{a}\cdot(\boxed{ケ}\vec{a}-\boxed{コ}\vec{b})+2\vec{b}\cdot(3\vec{a}-\boxed{サ}\vec{b})$

$=\boxed{シ}|\vec{a}|^2-\boxed{ス}|\vec{b}|^2$

3　$|3\vec{a}+4\vec{b}|^2$

$=(3\vec{a}+4\vec{b})\cdot(3\vec{a}+4\vec{b})$

$=3\vec{a}\cdot\boxed{セ}\vec{a}+\boxed{ソ}\vec{a}\cdot4\vec{b}+4\vec{b}\cdot3\vec{a}+4\vec{b}\cdot\boxed{タ}\vec{b}$

$=\boxed{チ}|\vec{a}|^2+\boxed{ツテ}\vec{a}\cdot\vec{b}+\boxed{トナ}|\vec{b}|^2$

4　$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$ のとき, $|\vec{a}+\vec{b}|$ の値を求めよ。

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\boxed{ニヌ}}$

PART4 内積の性質

4 (1) 次の等式が成り立つことを証明せよ。

(i) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$

(ii) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(iii) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2) $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ のとき，$|\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

[解答]

(1) (i) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot(\vec{c}+\vec{d})+\vec{b}\cdot(\vec{c}+\vec{d})$

$=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$

(ii) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(iii) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=3^2-2\times4+2^2=5$

$|\vec{a}-\vec{b}|\geqq0$ より　$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$

第 3 講 PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：2，ウ：3，エ：2，オ：3，
カ：2，キ：6，ク：4

[解説]

$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{c}+2\vec{d})$

$=\vec{a}\cdot(3\vec{c}+2\vec{d})+2\vec{b}\cdot(3\vec{c}+2\vec{d})$ [A]

$=\vec{a}\cdot3\vec{c}+\vec{a}\cdot2\vec{d}+2\vec{b}\cdot3\vec{c}+2\vec{b}\cdot2\vec{d}$

$=\mathbf{3\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{d}+6\vec{b}\cdot\vec{c}+4\vec{b}\cdot\vec{d}}$

[A]
$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$
（ただし k は実数）

2

[正解] ケ：3，コ：2，サ：2，シ：9，ス：4

[解説]

$(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})$

$=3\vec{a}\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})+2\vec{b}\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})$ [B]

$=3\vec{a}\cdot3\vec{a}-3\vec{a}\cdot2\vec{b}+2\vec{b}\cdot3\vec{a}-2\vec{b}\cdot2\vec{b}$

$=\mathbf{9|\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2}$

[B]
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$
（ただし k は実数）
$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

3

[正解] セ：3，ソ：3，タ：4，チ：9，
ツテ：24，トナ：16

[解説]

$|3\vec{a}+4\vec{b}|^2=(3\vec{a}+4\vec{b})\cdot(3\vec{a}+4\vec{b})$ [C]

$=3\vec{a}\cdot(3\vec{a}+4\vec{b})+4\vec{b}\cdot(3\vec{a}+4\vec{b})$

$=3\vec{a}\cdot\mathbf{3\vec{a}}+\mathbf{3\vec{a}}\cdot4\vec{b}+4\vec{b}\cdot3\vec{a}+4\vec{b}\cdot\mathbf{4\vec{b}}$

$=\mathbf{9|\vec{a}|^2+24\vec{a}\cdot\vec{b}+16|\vec{b}|^2}$

[C]
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$
（ただし k は実数）
$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

4 [正解] ニヌ：23

[解説]

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$ であるから

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$ [D]

$$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

$$=2^2+2\times5+3^2$$

$$=23$$

$|\vec{a}+\vec{b}|\geqq 0$ より

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{23}$$

[D]　$|s\vec{a}+t\vec{b}|$（s，t は実数）について
$|s\vec{a}+t\vec{b}|^2=(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})$
2乗すると「内積」として演算を行うことができる。